УДК 332.1+330.4+339.9+502/504
ББК 65.9(2Рос) +65.28
П 82

П 82 **Труды Гранберговской конференции**, 10–13 октября 2016 г., Новосибирск : Междунар. конф. «Пространственный анализ социально-экономических систем: история и современность» : сб. докладов – Новосибирск : ИЭОПП СО РАН, 2017. – 526 с.

ISBN 978-5-89665-310-3

Сборник представляет доклады международной конференции **"Пространственный анализ социально-экономических систем: история и современность"**, которая состоялась в ИЭОПП СО РАН 10-13 октября 2016 г. Доклады посвящены вопросам пространственного анализа и моделирования социально-экономических систем, использования новых методов и данных в этой области.

Конференция была посвящена памяти академика А.Г. Гранберга, внесшего неоценимый вклад в становление региональной науки в России. Публикуемые здесь труды ученых из разных регионов и стран, принадлежащих к разным научным школам, представляют современное состояние региональных исследований на постсоциалистическом пространстве.

Идеи и выводы авторов не обязательно отражают мнения представляемых ими организаций.

УДК 332.1+330.4+339.9+502/504
ББК 65.9(2Рос) +65.28

ISBN 978-5-89665-310-3

УДК 519.86

Рапопорт Э.О.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МЕР.

Некоторые приложения

Аннотация

Рассматривается проблема наилучшего (по метрике Канторовича-Рубинштейна) приближения непрерывных мер, заданных на прямой, дискретными мерами, т.е. мерами, сосредоточенными в отдельных точках. Введено понятие стационарной k-точки (конечный набор из k точек на прямой, в которых могут быть сосредоточены оптимальные дискретные меры). Получена система уравнений для нахождения стационарных k-точек. Разработан эффективный конструктивный алгоритм для получения таких точек, исследована проблема их существования и единственности. Приведены примеры наилучшего приближения некоторых вероятностных распределений дискретными мерами. Рассмотрены приложения предложенных идей к распределению сетей магазинов на прямой, на окружности, на плоскости и к проблемам миграционной устойчивости.

Ключевые слова: метрика, непрерывные меры, дискретные меры, наилучшее приближение, размещение сети магазинов, миграционная устойчивость.

Настоящий доклад является развитием старой работы автора, опубликованной еще в 1979 году [2].

Необходимость вернуться к ней возникла в связи с тем, что в настоящее время много усилий прилагается к исследованию проблем выбора точек сосредоточения некоторых масс, например, размещение сети магазинов, системы складов, сети избирательных участков и т.п. с минимальными затратами потребителей на дорогу ([5;6]).

К сожалению, работа [1] напечатана в малоизвестном издании, и поэтому изложенный в ней подход к решению проблем такого рода в имеющейся литературе не использовался. Следует заметить, кроме того, что предлагался конструктивный метод получения наилучшего приближения, позволяющий выяснить, является ли единственным полученное приближение. Добавим, что предложенное приближение непрерывной меры дискретной оказалось полезным при построении некоторых критериев согласия ([3]).

1. Дискретное приближение непрерывных мер

Основой исходной работы послужила статья Канторовича Л.В. и Рубинштейна Г.Ш.[2], в которой исследовалась общая задача Монжа о перемещении масс. В этой статье была введена метрика на пространстве счетно аддитивных мер, заданных на метрическом компакте. Эта метрика оказалось удобной для приближения конечных мер на прямой мерами с дискретным носителем, поскольку в этом случае метрика Канторовича-Рубинштейна принимает достаточно простой вид.

Пусть Φ – совокупность вероятностных мер μ, заданных на числовой прямой R с конечным абсолютным первым моментом. Условие конечности первого момента позволяет уйти от компактности, требуемой для построения метрики Канторовича-Рубинштейна. Естественно ввести функцию распределения меры $F(t)=\mu(-\infty,t)$, и предполагать, что она имеет кусочно-непрерывную плотность $f = F'$. По метрике Канторовича-Рубинштейна расстояние ρ между мерой μ и единичной мерой, сосредоточенной в некоторой точке a (будем обозначать эту меру через ε_a), определяется по формуле:

$$\rho(\mu,\varepsilon_a)= := \int_{-\infty}^{\infty} | x - a | f(x)dx$$

Легко видеть, что наименьшее значение этого расстояния достигается в такой точке a*, в которой выполняется равенство F(a*)= 1/2 . Это же утверждение сохраняется и для любой конечной меры, с небольшим уточнением – если F(R)= T, то в точке a* должно выполняться равенство F(a*) = T/2 Заметим, что для единственности такой точки a* достаточно, чтобы на носителе меры μ была строго монотонной и непрерывной функция распределения F, порожденная μ. Пусть теперь имеются две точечные меры ε_x и ε_y ,причем x < y. Барьером, разделяющим центры мер ε_x и ε_y будем называть такую точку c (x < c < y), что в точке x сосредоточена масса F(c), а в точке y – масса 1-F(c). Очевидно, что наилучшим (с точки зрения расстояния ρ приближением меры μ линейными комбинациями мер ε_x и ε_y есть следующая мера $\eta = (F(x+y)/2)\ \varepsilon_x + (1 - F(x+y))/2)\ \varepsilon_y$. Таким образом, оптимальный барьер между двумя точечными мерами должен находиться на середине отрезка, определенного их носителями. Это утверждение остается верным (с соответствующей корректировкой) и для случая $\mu(R)=T$ при любом T. Приведенные выше утверждения позволяют исследовать случай k точечных мер. Пусть имеются k точек $a_1 <$ $a_2 <...< a_k$ – узлы приближения и k-1 точек $y_1 < y_2 < ...\ y_{(k-1)}$ – барьеры приближения ($a_1<y_1<a_2<...<y_{(k-1)}< a_k$). Положим $a_0 = -\infty$, $a_{(k+1)} = + \infty$.

Лемма 1. При фиксированных узлах $a_1 < a_2 <...< a_k$ наилучшим приближением является такое, которое сопоставляет точке a_i массу, сосредоточенную на интервале $[(a_{(i-1)}+a_i)/2,(a_i+a_{(i+1)})/2]$. При фиксированных барьерах $y_1 < y_2 < ...\ y_{(k-1)}$ наилучшим приближением является такое, в котором узлы a_i определяются из соотношений $F(a_i)= (F(y_{(i-1)})+F(y_{(i+1)}))/2$.

Мы можем теперь рассмотреть следующий итеративный процесс: фиксируем произвольные узлы $a_1 < a_2 <...< a_k$, строим по ним оптимальные барьеры $y_1 < y_2 < ...\ y_{(k-1)}$ ($y_i = (a_{(i-1)}+a_i)/2$) По полученным барьерам строим новые оптимальные узлы и т.д. Тем самым, каждая итерация s описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$F(a_1^s) = 0.5F((a_1^{(s-1)}+ a_2^{(s-1)})/2)$$

$$F(a_j^s) = 0.5(F((a_{(j-1)}^{(s-1)}+ a_j^{(s-1)})/2)+ F((a_j^{(s-1)}+ a_{(j+1)}^{(s-1)})/2)) \tag{1}$$

$$F(a_k^s) = 0.5 + 0.5F((a_{(k-1)}^{(s-1)}+ a_2^{(s-1)})/2)$$

На s-том шаге такой итерации получаем k-меру η^s, носитель которой есть совокупность узлов $a_1^s < a_2^s <...< a_k^s$, причем в точке a_j^s сосредоточена масса $p_j^s = F((a_{(j+1)}^{(s-1)} + a_j^{(s-1)})/2)-F((a_j^{(s-1)} + a_{(j-1)}^{(s-1)})/2)$. Заметим, что расстояние ρ^s между мерами φ и η^s, $\rho^s = \rho(\varphi, \eta^s)$, монотонно убывает с ростом s.

Из леммы 1 вытекает очевидное следствие.

Следствие 1. Если существует k-мера, наилучшим образом приближающая меру φ, то на ее носителе – множестве $a_1 < a_2 <...< a_k$ – должны выполняться соотношения

$$F(a_1) = 0.5F((a_1+ a_2)/2)$$

$$F(a_j) = 0.5(F((a_{(j-1)}+ a_j)/2)+ F((a_j+ a_{(j+1)})/2)) \tag{2}$$

$$F(a_k) = 0.5 + 0.5F((a_{(k-1)}+ a_2)/2)$$

Множество $\{a_1 , a_2 ,....\ a_k \}$ для которого справедливы соотношения (2), будем называть стационарной k-точкой или просто k-точкой. Возникает естественный вопрос о сходимости процесса, определяемого соотношениями (2), к стационарной k-точке. При произвольных начальных узлах этот вопрос остается открытым. Однако специфическим образом выбирая начальное приближение можно построить два монотонно сходящихся процесса, причем один из процессов сходится к самой левой стационарной точке, а другой – к самой правой.

Подробно построение таких процессов приведено в [1;4].

Лемма 2. Левая k-точка покомпонентно мажорируется любой стационарной k-точкой; правая k-точка покомпонентно мажорирует любую стационарную k-точку.

Правая и левая k-точки описывают границы, внутри которых лежит k-мера, наилучшим образом приближающая исходную меру μ.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Существует k-мера, наилучшим образом приближающая меру μ.

Утверждение теоремы сразу следует из того, что искать оптимальную k-меру можно только среди мер, носители которых заключены в фиксированном компакте (определяемом левой и правой k-точками).

Теорема 2. Для того, чтобы существовала единственная стационарная k-точка, являющаяся оптимальной, необходимо и достаточно, чтобы левая и правая k-точки совпадали.

2. Характерные примеры

Пример 1. Пусть исходная мера – равномерная мера на отрезке [0,1]. Ее функция распределения имеет вид

$F(x)= x$,если $0 \leq x \leq 1$, $F(x) = 0$, если $x < 0$, $F(x) = 1$, если $x > 1$.

Легко проверить, что единственное наилучшее приближение этой меры дискретной мерой, сосредоточенной в k точках следующее: барьеры равномерно разбивают отрезок на k частей, $y_i=i/k, i=1,...,k-1$, а центры этих разбиений – точки сосредоточения дискретной меры $a_i = (i+0.5)/k$, $i=0,1,\ldots\ldots,k-1$.

Пример 2. Пусть исходная мера имеет экспоненциальную плотность на отрицательном луче: для $x \leq 0$$ функция распределения $F(x) = e^x$ и $f(x)=1$ для $x \geq 0$. Оптимальная дискретная k-мера сосредоточена в точках a_i :

$a_i = \ln(i^2/(k^2 2+k))$, $i=1,\ldots,k$.

Если рассматривать симметричную экспоненциальную плотность: $f(x)=0.5\ e^{(-|x|)}$, то можно доказать (это отнюдь не тривиально), что соответствующая дискретная k-мера описывается аналогично, она единственная и симметричная, причем точка 0 является либо барьером (если k четное), либо одним из узлов приближения (если k нечетное).

Однако симметрия не гарантирует единственность.

Пример 3. Рассмотрим симметричную меру на компакте с кусочно-постоянной плотностью, носитель которой – отрезок [-2.5,2.5], а плотность f внутри этого промежутка следующая:

$f(x) = 1/6$,если $-2.5\leq x < -0.5$,$1/3$,если $-0.5\leq x < 0.5$,$1/6$,если $0.5\leq$leq $x \leq 2.5$.

Для меры с такой плотностью существуют бесконечно много различных стационарных 2-точек: для любого s, принадлежащего промежутку[0,1], точки

$A_s=(-1.5+s,0.5+s)$ являются 2-точками, разделяющим барьером является $b_s = -0.5+s$.

Рассмотрим модификацию этого примера, изменив значение плотности в промежутке [-0.5,0.5]: постоянный кусок заменим на два линейных, сделав при этом плотность непрерывной:

$f(x)= 1/6$, если $-2.5 \leq x<-0.5$, $f(x)=(4x+3)/6$, если $-0.5 \leq x < 0$,

$f(x) = (-4x+3)/6$, если $0 \leq x < 0.5$,

$f(x) = 1/6$,если $0.5 \leq x \leq 2.5$.

В этом случае получаются ровно три стационарные 2-точки: A_1=(-1.5,0.5); A_2=(-1,1); A_3=(-0.5,1.5). Отметим здесь, что в точку A_2 итерациями можно попасть только за один шаг из начальных точек вида (-c,c). Она является 2-точкой, но является точкой локального максимума, а не минимума. Эта точка неустойчива – из любой ее окрестности итерационный процесс приводит либо к точке A_1, либо к точке A_3.

Пример 4. Нормальное распределение (N(x) – ее функция распределения) Доказать единственность в общем случае для этого распределения не удалось, однако численные эксперименты показали единственность k-точек для $k \leq 6$.

3. Приложения

В ряде работ (см.[5] с подробной библиографией) изучались задачи о размещении магазинов, торгующих одним и тем же товаром при равномерном распределении жителей(Линейный город). Если магазины принадлежат одной фирме, то рассмотренный выше подход дает полное решение, минимизирующее суммарные транспортные затраты покупателей при любой плотности, характеризующей распределение жителей.

Аналогично можно решить задачу и для плоского города с произвольной плотностью f(x,y).

Задача для плоского города рассматривалась в [5] в случае равномерного распределения. Это позволило авторам, используя евклидову метрику, получить разбиение плоскости на зоны тяготения в виде одинаковых шестиугольников.Отметим, что метрика, порожденная метрикой $\rho((x,y),(0,0)) = |x|+|y|$(т.н. манхеттенская метрика) лучше подходит для измерения городских расстояний, чем эвклидова метрика. Поэтому для определения координат узлов достаточно рассмотреть две одномерные задачи с плотностями , полученными интегрированием исходной двумерной плотности по одной из координат.

Зоны тяготения каждого узла получаются здесь в виде прямоугольников.

Если же имеется конкуренция, то задача слегка видоизменяется. Пусть, для простоты, имеем только два магазина. Для потребителя выбор магазина определяется затратами – суммой расстояния до магазина и ценой товара в этом магазине. Естественно считать, что он выбирает один из двух магазинов – справа или слева. Пусть b – граница между зонами тяготения магазинов с координатами a_1 и a_2, цены в которых равны p и q. Тогда b определяется потребителями по формуле:

$$b =(a_1 + a_2)/2 + (q-p)/2.$$

Для магазинов цель – максимизировать доход, поэтому при фиксированной политике потребителей с плотностью f(x) на отрезке[0,1] имеем магазинные функционалы $\Phi_1 = p(F(b)- F(0)$ и $\Phi_2 = q(F(1)-F(b)$. Равновесными ценами естественно называть такой набор (p*,q*), что при всех (p,q) справедливы неравенства

$$p^*(F((a_1+a_2)/2+(q^*-p^*)/2)-F(0))\geq p(F((a_1+a_2)/2+(q^*-p)/2)-F(0)).$$

$$q^*(F(1)-F((a_1 + a_2)/2 + (q^*-p^*)/2))\leq q(F(1)-F((a_1+a_2)/2+(q-p^*)/2)$$

Существование равновесия легко получается, если рассмотреть последовательное изменение узлов и барьеров, как это было сделано выше.

Аналогично можно сформулировать задачу для большего числа конкурирующих магазинов.

Распределение сети магазинов для случая круглого города рассматривалось в [5], где изучался только случай равномерного распределения массы по окружности. Изложенный в первом разделе подход применим и в этом случае для любого распределения меры на окружности следующим образом.

Пусть координаты точек на окружности определяются углами ω_i, $i=1,\ldots,k$, плотность меры зависит от угла. Стационарное размещение при любом распределении легко получить следующим образом. Зафиксируем любую точку (назовем ее α_0) на окружности (разрез) и рассмотрим отрезок$[\alpha_0,\alpha_0+2\pi]$, на котором получим некоторую стационарную k-точку $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$. Затем применим итерационный процесс, учитывающий, что фиксированная точка должна находиться на середине отрезка из крайних точек: $\alpha_0^1 = 0.5(\alpha_1+ \alpha_k)$.Получаем новый разрез, для которого него получаем новую стационарную точку $(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_k^1)$ На s-том шаге итерации новый разрез получается по формуле $\alpha_0^{(s+1)} = 0.5(\alpha_1^s+ \alpha_k^s)$. В итоге стационарная k-точка должна быть решением системы:

$F(\alpha_1) = 0.5F(\alpha_1^s + \alpha_2^s \})$

$F(\alpha_j) = 0.5(F(0.5(\alpha_j+ \alpha_{(j+1)}))+ F(0.5(\alpha_j+ \alpha_{(j-1)}))$

$F(\alpha_k) = 0.5 +0.5 F(0.5(\alpha_k+ \alpha_{(k-1)})$

$\alpha_0 = (\alpha_1+ \alpha_k)/2.$

Таким способом можно получить наилучшее приближение меры, заданной на окружности, дискретной мерой.

Описанная в разделе 1 задача оказывается весьма полезна при исследовании размещения различного вида общественных институтов. В работе [6;7] эта проблема изучалась только для равномерного на единичном интервале распределения потребителей услуг. В [9] изучалась такая же задача для равномерного распределения в некоторой области на плоскости. Используемая при этом эвклидовая метрика привела к разбиению области на правильные шестиугольники. Следует заметить, что эта метрика является неестественной для условий города. Использование же плоской метрики, порожденной нормой $\rho(x,y)= |x|+|y|$ дает решение исходной задачи и приводит к разбиению на прямоугольники для любого распределения, а не только равномерного.

При изучении миграционно-устойчивых распределений в работе[8] уже рассматривалось произвольное распределение на прямой. Была исследована проблема миграционной устойчивости некоторого разбиения отрезка на страны, имеющие вид выпуклых интервалов.

Пусть на отрезке [0,1] задана функция F – функция распределения жителей ($F(0)= 0$, $F(1)= 1$). Авторы ввели следующую целевую функцию Ψ каждого жителя, проживающего в стране с границами [s,r]: $\Psi(x) = |x-m(s,r)| + g/(F(r)-F(s))$, где g – фиксированная константа, а m(s,r) – фиксированное расположение столицы страны. Обычно в качестве этого расположения берется такое, что выполняется соотношение

$F(m(s,r)) =0.5(F(r)+F(s)).$

Разбиение отрезка на интервалы было названо миграционно-устойчивым (migrration-proof), если существует такоеи разбиение исходного отрезка, что ни одному из жителей не выгодно (с точки зрения функционала Ψ переезжать в другую страну. Следует отметить, что предложенное в разделе 1 разбиение центрами a_1, $a_2,\ldots, a_k$ (столицы) и барьерами $y_1,y_2, \ldots,y_{(k-1)}$ (границы) определяет центр каждой страны именно по требуемой формуле . Кроме того, это разбиение при g = 0 является миграционно-устойчивым.

Приведем небольшой пример. Пусть население распределено равномерно на отрезке [0,1]. Рассмотрим случай, когда имеются только две страны. Тогда при $g \geq 1/8$ единственное миграционно-устойчивое разбиение – [0,1] = [0,1/2]U[1/2,1]. При $g < 1/8$ существуют еще два разбиения, порожденные $c= 0.5(+-(1-8g)^{0.5})$. В итоге, имеются три миграционно-устойчивых разбиения. Если h – эффект для граничных жителей, то для точки c=0,5(1+(1-8g)$^{0.5}$ h = 2g/(1+(1-8g)$^{0.5}$)+ 0.25(1+(1-8g)$^{0.5}$}) = 0.5; для точки c=0.5 получаем h = 2g + 0.25.

Легко видеть, что пограничным жителям симметричное разбиение всегда выгоднее, чем асимметричное: 2g + 0.25 < 0.5. Отметим, что возникает еще одно миграционно-устойчивое распределение в этом случае (если игнорировать интересы жителей с нулевой мерой, расположенных в точках границы) – одна страна, при этом для жителей границы (в точках 0 и 1) эффект h = g +0.5. Поэтому при g > 0.25 для всех жителей границ выгоднее одна страна, чем две.

Предложенная концепция миграционной устойчивости одинаково учитывает интересы всех жителей, игнорируя плотности их размещения. Если рассмотреть интегральную характеристику учета интересов жителей (интеграла от целевых функций каждого жителя с учетом плотности), то при функционале

$$\Psi(x) = |x-m(s,r)| + g/(F(r)-F(s))$$

легко получить, что наилучшее решение, минимизирующее суммарные транспортные затраты всех жителей при любом g, – описанные в разделе 1 стационарные k-точки.

Подробные доказательства некоторых приведенных в докладе утверждений можно найти в [4].

Работа поддержана РФФИ (гранты №16-01-00108 и № 16-06-00101).

Список источников

1. **Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш.** Об одном пространстве вполне аддитивных функций // Вестник ЛГУ, 1958,№ 7. Сер. математика, механика, астрономия, вып.2, с.52–59.

2. **Рапопорт Э.О.** О наилучшем приближении вероятностных мер на прямой дискретными // Оптимизация 23(40)Новосибирск,1979, с.17–24

3. **Рапопорт Э.О.** О критериях согласия, связанных с наилучшим приближением мер // Оптимизация 25(42), Новосибирск,1980, с.42–55.

4. **Рапопорт Э.О.** О дискретном приближении непрерывных мер и некоторых приложениях // Сибирский журнал индустриальной математики. Том XV, № 3(51). 2012, с. 99–110.

5. **Тироль Ж.** Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности, т.2 – Спб.:Экономическая школа, 2000. 420 с.

6. Alesina, A. and Spolaore, E. (1997). On the number and size of nations. Quarterly Journal of Economics 1997, 113,1027–1056.

7. **Bogomolnaia, A., Le Breton, M., Savvateev, A. and Weber, S.** Stability under unanimous consent, free mobility and core. International Journal of Game Theory, 2007,35, 185–204.

8. **M.Le Breton, D.Musatov, A.Savvateev, S.Weber.** Rethinking Alesina and Spolaore's "uni-dimensional world": existence of migration proof country structures for arbitrary distributed populations, mimeo.

9. **Dreze, J., Le Breton M., Savvateev A., and Weber S.** Almost subsidy-free spatial pricing in a multi-dimensional setting Journal of Economic Theory, 2009, Vol.143, Issue 1, pp.275–291.

Информация об авторе

Рапопорт Эрнест Ошерович, Россия, Новосибирск, к.ф.-м.н., доцент, научный сотрудник ИМ СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, проспект академика Коптюга 4, rapoport@math.nsc.ru

Rapoport E.O.

ON A PROBLEM OF DISCRETE APPROXIMATION OF CONTINUOUS MEASURES.

Some applications

Abstract

Considers the problem of best (on the metric the Kantorovich-Rubinstein) approximation of continuous measures defined on a straight line discrete measures, i.e. measures focused at specific points. The notion of a stationary k-points (a finite set of k points on a line, which can be focused for optimal discrete measures). The system of equations for calculating the stationary k – points it was obtained. An effective constructive algorithm for obtaining such points is developed. It was investigated the problem of existence and uniqueness. Examples of the best approximation of certain probability distributions of discrete measures were resulting. It was considered the applications of the proposed ideas to the distribution networks of the shops on the line, on the circle, on the plane, and migration-proof.

Key words: metric, continuous measures discrete measures, the best approximation, the location of chain stores, migration-proof.