УДК 332.1+330.4+339.9+502/504
ББК 65.9(2Рос) +65.28
П 82

П 82 **Труды Гранберговской конференции**, 10–13 октября 2016 г., Новосибирск : Междунар. конф. «Пространственный анализ социально-экономических систем: история и современность» : сб. докладов – Новосибирск : ИЭОПП СО РАН, 2017. – 526 с.

ISBN 978-5-89665-310-3

Сборник представляет доклады международной конференции **"Пространственный анализ социально-экономических систем: история и современность"**, которая состоялась в ИЭОПП СО РАН 10-13 октября 2016 г. Доклады посвящены вопросам пространственного анализа и моделирования социально-экономических систем, использования новых методов и данных в этой области.

Конференция была посвящена памяти академика А.Г. Гранберга, внесшего неоценимый вклад в становление региональной науки в России. Публикуемые здесь труды ученых из разных регионов и стран, принадлежащих к разным научным школам, представляют современное состояние региональных исследований на постсоциалистическом пространстве.

Идеи и выводы авторов не обязательно отражают мнения представляемых ими организаций.

УДК 332.1+330.4+339.9+502/504
ББК 65.9(2Рос) +65.28

ISBN 978-5-89665-310-3

УДК 333.1: 519.86

Васильев В.А.

О РАВНОВЕСИИ В МНОГОРЕГИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ МНОЖЕСТВАМИ

Аннотация

В докладе излагаются результаты применения теоретико-игровых методов к анализу условий существования вальрасовских равновесий в моделях межрегионального взаимодействия. В отличие от большинства публикаций по рассматриваемой тематике, главное внимание уделяется подходу, не предполагающему ограниченности региональных технологических множеств. Ключевую роль в доказательстве новой теоремы существования играет приводимая в докладе теорема об условиях непустоты нечетких ядер изучаемых многорегиональных систем.

С использованием методов теории кооперативных игр развивается новый подход к исследованию проблемы существования равновесия в рассматриваемом классе экономических систем. Как и для классических моделей типа Эрроу-Дебре, предлагаемый подход предполагает реализацию следующих двух этапов. Во-первых, отыскиваются условия, гарантирующие совпадение множества равновесных распределений и нечеткого ядра изучаемой системы. Во-вторых, устанавливаются требования, обеспечивающие непустоту указанного нечеткого ядра. Ясно, что объединение условий, полученных на приведенных этапах, дает искомую теорему существования экономического равновесия. Отметим также, что предложенный подход позволяет избавиться от использовавшегося ранее довольно обременительного условия Парето-регулярности многорегиональных систем.

Ключевые слова: многорегиональная экономическая система, вальрасовское равновесие, нечеткое ядро, автаркия, "рог изобилия".

1. Модель M

В докладе рассматривается модель экономического взаимодействия регионов из [2,6], имеющая следующий вид:

$$\mathrm{M} = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s\in R}\rangle,$$

где $R = \{1,\dots, r\}$ – множество регионов; A^s – прямоугольная матрица размера $n_s \times l_s$, характеризующая производственный сектор региона $s \in R$; G^s и H^s – прямоугольные матрицы размера $n_s \times n$, описывающие способы вывоза и ввоза в регионе $s \in R$; b^s – вектор-столбец размерности n_s, характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона $s \in R$; d^s – вектор-столбец размерности n_s, описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона $s \in R$.

Ресурсно-технологические возможности Z_s региона $s \in R$ определяются формулой

$$Z_s := \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathrm{R}_+^{l_s} \times \mathrm{R}_+^{n} \times \mathrm{R}_+^{n} \times \mathrm{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \ge b^s + \lambda_s d^s\},$$

где неотрицательные вектор-стобцы $x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}$, $u^s = (u_j^s)_{j=1}^{n}$, $v^s = (v_j^s)_{j=1}^{n}$ указывают объёмы производства, вывоза и ввоза, соответственно, а число $\lambda_s \in \mathrm{R}_+$ – степень достижения целей регионального развития для $s \in R$ (как обычно, символом R обозначается множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле: $x \ge y \Leftrightarrow x_i \ge y_i$, $i = 1,\dots, m$ для любых $x = (x_1,\dots, x_m)$ и $y = (y_1,\dots, y_m)$ из R^m). Элементы множества Z_s будем называть *планами* региона s.

Для оценки качества планов $z^s \in Z_s$ в дальнейшем используются функции t_s, сопоставляющие каждому вектору $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ его последнюю компоненту λ_s:

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) := \lambda_s,\ (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s,\ s \in R.$$

Положим $Z_{\rm M} := \prod_{s\in R} Z_s$ и через $Z_{\rm M}(R)$ обозначим совокупность *сбалансированных планов* модели M:

$$Z_{\rm M}(R) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R} \in Z_{\rm M} \mid \textstyle\sum_{s\in R} u^s \geq \sum_{s\in R} v^s\}.$$

Важную роль в дальнейшем играют так называемые *автаркические планы*

$$Z(s) = Z_{\rm M}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \geq v^s\},\ s \in R,$$

и *строго автаркические планы*, под которыми понимаются элементы множеств

$$\hat{Z}(s) = \hat{Z}_{\rm M}(s) := \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\},\ s \in R,$$

(как обычно, сокращение $x \gg y$ для векторов $x, y \in \mathrm{R}^m$ означает выполнение строгих неравенств $x_i > y_i$, $i = 1,\ldots, m$).

Кроме того, при анализе условий ограниченности множества $Z_{\rm M}(R)$ потребуется рассмотрение сбалансированных планов *однородной составляющей модели* M, определяемой формулой: $\mathrm{M}_0 = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s\in R}\rangle$.

2. Вальрасовское равновесие и нечеткое ядро

Следуя [2,6], введем одно из основных понятий работы – определение вальрасовского равновесия в модели межрегионального взаимодействия M.

Определение 1. *Будем говорить, что план* $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s\in R} \in Z_M(R)$ *является вальрасовским равновесием модели* M, *если существует ненулевой вектор цен* $\bar{p} \in \mathrm{R}^n_+$ *такой, что* $\bar{p}.\bar{u}^s \geq \bar{p}.\bar{v}^s$ *для всех* $s\in R$, *и при этом для любых* $s \in R$ *и* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$ *справедлива импликация*: $\lambda_s > \bar{\lambda}_s \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s$ (*как обычно,* $x \cdot y$ *– скалярное произведение векторов* x *и* y).

Совокупность вальрасовских равновесий модели M будем обозначать через W(M). Оказывается[1], что достаточно общие условия, гарантирующие существование вальрасовских равновесий модели M, представляют собой естественное усиление указанных в [1] требований (M1) и (M2), обеспечивающих непустоту ядра модели M (полное описание требований (M1) и (M2) приводится в следующем разделе).

Переходя к формулировке основного результата вышеупомянутой статьи, дадим необходимые определения.

Определение 2. *Регион* $s \in R$ *называется строго автаркическим, если* $\hat{Z}_{\rm M}(s) \neq \emptyset$ (*или, более детально, если существует план* $z^s_0 = (x^s_0, u^s_0, v^s_0, \lambda^0_s) \in Z_s$ *такой, что* $u^s_0 \gg v^s_0$).

Определение 3. *Будем говорить, что ресурсно-технологические возможности региона* $s \in R$ *ограниченные, если множество* Z_s *ограничено.*

[1] См. Васильев В.А. О существовании вальрасовского равновесия в модели межрегиональных экономических отношений // Дискретный анализ и исследование операций. – 2012. – Т. 19, № 4. – С.15–34.

Теорема 1. *Если регионы модели М строго автаркические, а их ресурсно-технологические возможности ограниченные, то в М существует вальрасовское равновесие.*

Как уже отмечалось, основной целью доклада является демонстрация условий существования равновесия, не включающих требования ограниченности множеств Z_s. Отыскание таких условий осуществляется на пути решения двух теоретико-игровых задач: одна из них заключается в определении требований, гарантирующих совпадение множества W(М) и нечеткого ядра модели М, другая – в нахождении условий непустоты указанного нечеткого ядра.

Для полноты изложения напомним определение нечеткого ядра модели М, опирающееся на понятие блокирования с помощью нечеткой коалиции. Как обычно [4,7], нечеткими коалициями называются элементы множества σ_F, определяемого формулой $\sigma_F := \{ \tau = (\tau_1 ,\ldots, \tau_r) \mid \tau \neq 0, \tau_s \in [0,1], s \in R\}$. Величина компоненты τ_s нечеткой коалиции τ указывает степень участия региона $s \in R$ в координации усилий "большой коалиции" R. Через $R(\tau)$ будем обозначать носитель нечёткой коалиции $\tau = (\tau_1 ,\ldots, \tau_r)$, определяемый равенством $R(\tau) := \{s \in R \mid \tau_s > 0\}$. Следуя [2,6], введем определение нечеткого блокирования во множестве Z_M (R).

Определение 4. *Будем говорить, что план* $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R} \in Z_M(R)$ *блокируется нечёткой коалицией* $\tau = (\tau_1 ,\ldots, \tau_r)$, *если существуют региональные планы* $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s$, $s \in R(\tau)$, *такие, что* $t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s)$ *для каждого* $s \in R(\tau)$, *и при этом имеет место баланс:* $\sum_{s\in R(\tau)} \tau_s u^s \geq \sum_{s\in R(\tau)} \tau_s v^s$.

Совокупность сбалансированных планов модели М, не блокируемых никакой нечёткой коалицией, будем обозначать через C_F(М) и называть *нечётким ядром модели* М.

Введем понятие ненасыщенности региона, используемое в дальнейшем при описании условий совпадения нечетких ядер и вальрасовских планов модели М.

Определение 5. *Регион* $s \in R$ *называется ненасыщенным, если для него выполняется неравенство:* $\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \sup_{\tilde{z}^s \in \tilde{Z}_s} t_s(\tilde{z}^s)$, *где* $\tilde{Z}_s := \mathrm{Pr}_{Z_s} Z_M(R)$.

Один из основных результатов доклада заключается в следующей теореме эквивалентности.

Теорема 2. *Если регионы модели* М *строго автаркические и ненасыщенные, то ее нечеткое ядро* C_F(*M*) *совпадает с множеством вальрасовских планов* W(М).

Переходя к представлению условий существования равновесия, применимых к моделям, имеющим неограниченные технологические множества, напомним важное условие, "отвечающее" (наряду с автаркичностью) за наличие неблокируемых планов таких моделей (см., например, [1]).

Определение 6. *Будем говорить, что* модель М *не имеет "рога изобилия", если множество сбалансированных планов однородной составляющей этой модели исчерпывается нулевым планом*: $Z_{M_0}(R) = \{0\}$.

Используя введенную терминологию, сформулируем главный результат доклада.

Теорема 3. *Если модель* М *не имеет "рога изобилия", а ее регионы — строго автаркические и ненасыщенные, то в* М *существует вальрасовское равновесие.*

3. Условия непустоты нечеткого ядра

Исчерпывающее доказательство теоремы 3 занимает довольно много места и не укладывается в рамки настоящего доклада. Поэтому ниже излагается лишь центральная часть этого доказательства, представляющая и самостоятельный интерес: устанавливается, что при тех же условиях, что и в теореме о непустоте обычного ядра [1], гарантируется существование гораздо более квалифицированного оптимального решения – сбалансированного плана многорегиональной системы, не блокируемого никакой нечеткой коалицией.

Напомним сначала определение и некоторые факты, касающиеся обычного (стандартного) ядра модели M (они используются в дальнейшем для исследования нечеткого ядра этой модели).

Определение 7. *Говорят, что план* $z = (z^s)_{s\in R} \in Z_{\mathrm{M}}(R)$ *блокируется (обычной) коалицией* $S \subseteq R$ ($S \neq \emptyset$), *если существуют региональные планы* $\tilde{z}^s = (\tilde{x}^s, \tilde{u}^s, \tilde{v}^s, \tilde{\lambda}_s) \in Z_s$, $s \in S$, *такие, что* $\sum_{s\in S} \tilde{u}^s \geq \sum_{s\in S} \tilde{v}^s$, *и при этом* $t_s(\tilde{z}^s) > t_s(z^s)$ *для всех* $s \in S$. *Совокупность планов из* $Z_{\mathrm{M}}(R)$, *не блокируемых никакой коалицией* $S \subseteq R$, *будем обозначать через* $C(\mathrm{M})$ *и называть (стандартным) ядром модели* M.

Приведем простые условия, гарантирующие непустоту стандартного ядра $C(\mathrm{M})$ модели M. Эти условия, установленные в работе [1], имеют отношение как к индивидуальным свойствам регионов, так и к некоторым интегральным характеристикам системы M в целом:

($M1$) $Z_{\mathrm{M}}(s) \neq \emptyset$ для каждого $s \in R$.

($M2$) $Z_{M_0}(R) = \{0\}$.

Замечание 1. Условие ($M1$) означает определенную самодостаточность регионов $s \in R$: каждый из них имеет хотя бы один автаркический план. Что касается условия ($M2$), то оно трактуется как отсутствие "рога изобилия" в системе M. Напомним в этой связи, что однородная составляющая M_0 отличается от модели M только тем, что ресурсно-технологический потенциал каждого из регионов равен нулю. Поэтому отсутствие "рога изобилия" означает, как и в классических моделях равновесного анализа [3], что при нулевом экономическом потенциале рассматриваемой системы экономического взаимодействия возможна лишь ее нулевая хозяйственная активность. Отметим еще, что в формальном плане соотношение $Z_{M_0}(R) = \{0\}$ является необходимым и достаточным условием ограниченности множества $Z_{\mathrm{M}}(R)$ сбалансированных планов модели M (что вытекает из полиэдральности $Z_{\mathrm{M}}(R)$ и известного результата выпуклого анализа [5]).

Переходя к описанию нечеткой кооперативной игры, сопоставляемой модели M, введем продолжение на σ_F отображения $S \mapsto Z_{\mathrm{M}}(S)$, заданного соотношениями

$$Z_{\mathrm{M}}(S) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in S} \in \prod_{s\in S} Z_s \mid \sum_{s\in S} u^s \geq \sum_{s\in S} v^s\},\ \ S \subseteq R,$$

характеризующими возможности кооперации для обычных коалиций $S \subseteq R$. Указанное продолжение $\tau \mapsto Z_{\mathrm{M}}(\tau)$ имеет вид:

$$Z_{\mathrm{M}}(\tau) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s\in R(\tau)} \in \prod_{s\in R(\tau)} Z_s \mid \sum_{s\in R(\tau)} \tau_s u^s \geq \sum_{s\in R(\tau)} \tau_s v^s\},\ \ \tau \in \sigma_F.$$

Обобщенная нечеткая кооперативная игра G^F_{M}, ассоциированная с моделью M, определяется формулой

$$G^F_{\mathrm{M}}(\tau) = \{v \in \mathrm{R}^{N(\tau)} \mid \exists (z^s)_{s\in R(\tau)} \in Z_{\mathrm{M}}(\tau)[v_s \leq t_s(z^s), s \in R(\tau)]\},\ \ \tau \in \sigma_F.$$

Напомним еще определение F-сбалансированности нечеткой кооперативной игры $\tau \mapsto G(\tau)$; $\tau \in \sigma_F$. Начнем с определения F-сбалансированного покрытия "большой коалиции" (множества R всех игроков) конечным семейством нечетких коалиций.

Определение 8. *Конечное семейство нечетких коалиций $\{\tau^k\}_{k\in K}$ будем называть F-сбалансированным покрытием множества R, если существуют неотрицательные числа $\{\lambda_k\}_{k\in K}$* такие, что $\sum_{k\in K}\lambda_k\tau^k = (1,1,\ldots,1)$. *По аналогии с классическим определением числа λ_k будем называть весами нечетких коалиций τ^k.*

Чтобы сформулировать понятие F-сбалансированной обобщенной игры G, определим сначала аналог G-сбалансированного дележа для такой игры. Далее, как обычно, через $u^S \in \mathrm{R}^S$ обозначается сужение вектора $u = (u1,\ldots,u_r)$ на множество $S \subseteq R : (u_S)_i = u_i,\ i \in S$.

Определение 9. *Пусть G — произвольная обобщенная кооперативная игра n лиц. Вектор $u \in \mathrm{R}^R$ будем называть G-сбалансированным, если существует F-сбалансированное покрытие $\{\tau^k\}_{k\in K}$ множества R такое, что $u_{R(\tau^k)} \in G(\tau^k)$ для всех $k \in K$.*

Определение 10. *Игра G называется F-сбалансированной, если любой G-сбалансированный вектор принадлежит $G(R)$.*

Ключевую роль в дальнейших рассмотрениях играет следующий факт.

Предложение 1. *При любых исходных данных модели* М *игра G^F_{M} является* F-*сбалансированной.*

Доказательство. Ясно, что при $G^F_{\mathrm{M}}(\tau) = \emptyset$ для всех $\tau \in \sigma_F$ справедливость предложения вытекает непосредственно из определения сбалансированности. Рассмотрим нетривиальный случай, когда для какого-либо сбалансированного покрытия $\{\tau^k\}_{k\in K}$ коалиции R все множества $G_{\mathrm{M}}(\tau^k)$, $k \in K$, являются непустыми, и при этом для некоторого вектора $\omega \in \mathrm{R}^R$ и для всех $k \in K$ имеют место включения $\omega_{R_k} \in G^F_{\mathrm{M}}(R_k)$, где $R_k = R(\tau^k)$. Покажем, что ω принадлежит множеству $G^F_{\mathrm{M}}(R)$. Действительно, согласно определению игры G^F_{M}, включения $\omega_{R_k} \in G^F_{\mathrm{M}}(R_k)$, $k \in K$ означают, что существуют планы $(x^{ks}, u^{ks}, v^{ks}, \lambda_{ks}) \in Z_s$, $s \in R_k$, $k \in K$, такие, что

$$\sum_{s\in R_k}\tau^k_s(u^{ks} - v^{ks}) \geq 0,\ k \in K. \tag{1}$$

При этом для указанных планов $z^{ks} = (x^{ks}, u^{ks}, v^{ks}, \lambda_{ks})$ и соответствующих компонент вектора ω выполняются неравенства

$$\omega_s \leq \lambda_{ks},\ s \in R_k,\ k \in K. \tag{2}$$

Построим план $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s\in R}$ большой коалиции R, полагая

$$z^s = \sum_{k\in K_s}\mu_{ks}z^{ks},\ s \in R, \tag{3}$$

где $K_s = \{k \in K \mid s \in R_k\}$, $s \in R$, а величины μ_{ks} определяются формулой: $\mu_{ks} = \delta_k\tau^k_s$, $k \in K_s$, $s \in R$, где δ_k – веса нечетких коалиций τ^k фигурирующие в условии сбалансированности покрытия $\{\tau^k\}_{k\in K}$: $\delta_k \geq 0,\ k \in K,$ и при этом

$$\sum_{k\in K}\delta_k\tau^k = (1,1,\ldots,1). \tag{4}$$

На основании соотношения (4) и неотрицательности чисел δ_k и τ_s^k имеем: все величины μ_{ks} неотрицательны, и при этом для каждого $s\in R$ выполняются равенства $\sum_{k\in K_s}\mu_{ks}$ = 1. Но тогда из формулы (3) на основании выпуклости множеств Z_s получаем: $\bar{z}^s\in Z_s$ для каждого $s\in R$. Покажем теперь, что план $\bar{z}$ является сбалансированным. Для того, чтобы установить включение $\bar{z} = (\bar{x}^s,\bar{u}^s,\bar{v}^s,\bar{\lambda}_s)_{s\in R}\in Z_{\text{M}}(R)$, обратимся снова к формуле (3) и подсчитаем объемы вывоза $\bar{u}^s$ и ввоза $\bar{v}^s$, отвечающие региональным составляющим $\bar{z}^s$ плана $\bar{z}$. Непосредственно из определения $\bar{z}^s$ вытекает, что соответствующие выражения (в терминах u^{ks}, v^{ks} и μ_{ks}) имеют следующий вид: $\bar{u}^s=\sum_{k\in K_s}\mu_{ks}u^{ks}$ и $\bar{v}^s=\sum_{k\in K_s}\mu_{ks}v^{ks}$ для каждого $s\in N$. Покажем, что выполняется неравенство $\sum_{s\in R}\bar{u}^s\geq\sum_{s\in R}\bar{v}^s$, означающее сбалансированность плана $\bar{z}$. Для этого умножим каждое из неравенств (1) на соответствующий множитель $\delta_k\geq 0$ и просуммируем получившиеся соотношения. В итоге, с учетом равенств $\mu_{ks}=\delta_k\tau_s^k$, имеем: $\sum_{k\in K}\sum_{s\in R_k}\mu_{ks}u^{ks}\geq\sum_{k\in K}\sum_{s\in R_k}\mu_{ks}v^{ks}$. Отсюда, меняя знаки суммирования, получаем $\sum_{s\in R}\sum_{k\in K_s}\mu_{ks}u^{ks}\geq\sum_{s\in R}\sum_{k\in K_s}\mu_{ks}v^{ks}$, что, в силу соотношений (3), и доказывает справедливость неравенства $\sum_{s\in R}\bar{u}^s\geq\sum_{s\in R}\bar{v}^s$. Итак, включение $\bar{z}\in Z_{\text{M}}(R)$ установлено.

Далее, умножая каждое из неравенств (2) на соответствующее неотрицательное число μ_{ks} и суммируя получающиеся соотношения по $k\in K_s$ для каждого $s\in R$, имеем $\omega_s=\omega_s\sum_{k\in K_s}\mu_{ks}\leq\sum_{k\in K_s}\lambda_{ks}\mu_{ks}$, $s\in R$. Учитывая, что в силу построения планов $\bar{z}^s$ = $(\bar{x}^s,\bar{u}^s,\bar{v}^s,\bar{\lambda}_s)$ справедливы равенства $\bar{\lambda}_s=\sum_{k\in K_s}\lambda_{ks}\mu_{ks}$, $s\in R$, получаем требуемое: $\omega_s=\leq t_s(\bar{z}^s)=\bar{\lambda}^s$, $s\in R$, для $\bar{z}=(\bar{z}^s)_{s\in R}$ из $Z_{\text{M}}(R)$ и, следовательно, ω принадлежит $G_{\text{M}}^F(N)$.

Предложение 2. *Для каждой коалиции $\tau\in\sigma_F$ множество $G_{\text{M}}^F(\tau)$ является насыщенным снизу и замкнутым, при этом выполнение условия* (*M*1) *гарантирует непустоту всех множеств $G_{\text{M}}^F(\tau)$, $\tau\in\sigma_F$. Если, в дополнение к* (*M*1), *модель* М *удовлетворяет условию* (*M*2), *то множество индивидуально-рациональных дележей $\hat{G}_{\text{M}}^F(R)$ игры G_{M}^F непусто и ограничено сверху.*

Доказательство. Насыщенность снизу множеств $G_{\text{M}}^F(\tau)$ вытекает непосредственно из их определения. Далее, для проверки замкнутости этих множеств зафиксируем произвольное $\tau\in\sigma_F$ и покажем сначала, что множество $Z(\tau)$ — полиэдрально. Действительно, ввиду полиэдральности множеств Z_s полиэдральным будет и их декартово произведение $\prod_{s\in R(\tau)}Z_s$. Поскольку множество $Z_{\text{M}}(\tau)$ получается (по определению) из множества $\prod_{s\in R(\tau)}Z_s$ наложением дополнительных линейных ограничений $\sum_{s\in R(\tau)}\tau_s^k(u^{ks}-v^{ks})\geq 0$, k = 1, …, m, полиэдральным будет и $Z_{\text{M}}(\tau)$. Но тогда, ввиду линейности функций t_s, и множество $U_{\text{M}}(\tau)=\{(t_s(z^s))_{s\in R(\tau)}\,|\,(z^s)_{s\in R(\tau)}\in Z_{\text{M}}(\tau)\}$ является полиэдральным, будучи линейным образом множества $Z_{\text{M}}(\tau)$ (см. [5]). Следовательно, и множество

$$G_{\text{M}}^F(\tau)=U_{\text{M}}(\tau)-\mathrm{R}_+^{R(\tau)}, \tag{5}$$

как алгебраическая сумма полиэдральных множеств, тоже будет полиэдральным [5], что и доказывает замкнутость $G_{\text{M}}^F(\tau)$.

Допустим, что для модели М выполняется предположение ($M1$). Зафиксируем некоторые планы $z^{s0} \in Z_{\text{М}}(s)$, $s \in R$. Ясно, что для каждого $\tau \in \sigma_F$ выполняется включение $(z^{s0})_{s\in R(\tau)} \in Z_{\text{М}}(\tau)$. Поэтому при выполнении условия ($M1$) все множества $Z_{\text{М}}(\tau)$ являются непустыми, а значит, в силу формулы (5), непустыми будут и все множества $G^F_{\text{М}}(\tau)$.

Переходя к доказательству последней части предложения 2, напомним [5], что при выполнении условия (М2) множество $Z_{\text{М}}(R)$ является ограниченным (как совокупность решений системы линейных неравенств, для которой ассоциированная однородная система имеет единственное решение). Следовательно, в силу ($M1$) и установленной уже замкнутости всех множеств $Z_{\text{М}}(\tau)$, множество $Z_{\text{М}}(R)$ является непустым компактом. Но тогда, будучи непрерывным образом этого компакта, непустым компактом будет и множество $U_{\text{М}}(R)$. Отсюда, в силу формулы (5), получаем: множество $G^F_{\text{М}}(R)$ ограничено сверху. Значит, в силу очевидного вложения $\hat{G}^F_{\text{М}}(R) \subseteq G^F_{\text{М}}(R)$, ограниченным сверху будет и множество $\hat{G}^F_{\text{М}}(R)$ индивидуально-рациональных дележей коалиции R:

$$\hat{G}^F_{\text{М}}(R) = \{u \in G^F_{\text{М}}(R) \mid u \geq u^0\},$$

где $u^0_s = \sup\{u_s \in \mathrm{R} \mid u_s \in G\,(e^s)\}$, $s \in R$, а e^s – s-ый орт пространства R^R. Для доказательства непустоты этого множества покажем сначала, что в условиях предложения 2 все множества $Z_{\text{М}}(s)$ являются непустыми компактами. Учитывая, что непустота этих множеств обеспечивается предположением ($M1$), а замкнутость, как уже отмечалось, вытекает из их полиэдральной выпуклости, единственное, что еще нуждается в проверке – ограниченность множеств $Z_{\text{М}}(s)$, $s \in R$. С этой целью отметим, что непосредственно из определения множества $Z_{\text{М}}(R)$ вытекают включения: $\hat{z} = (\hat{z}^1,\ldots,\hat{z}^R) \in Z_{\text{М}}(R)$ для любых $\hat{z}^s \in Z_{\text{М}}(s)$, $s \in R$. Отсюда, в силу ограниченности множества $Z_{\text{М}}(R)$ гарантированной условием ($M2$), и вытекает ограниченность всех множеств $Z_{\text{М}}(s)$, $s \in R$.

Итак, каждое из множеств $Z_{\text{М}}(s)$ является непустым компактом. Следовательно, непрерывные функции t_s достигают своих максимальных значений на соответствующих индивидуальных планах $z^{s*} \in Z_{\text{М}}(s)$, реализующих максимальные гарантированные выигрыши u^0_s одноэлементных коалиций $\{s\}$: $u^0_s = \max_{z^s \in Z_{\text{М}}(s)} t(z^s) = t_s(z^{s*})$, $s \in R$. Поскольку коллективный план $z^* = (z^{s*})_{s\in R}$ принадлежит $Z_{\text{М}}(R)$, выполняется включение $(u^0_1,\ldots,u^0_r) = (t_1(z^{1*}),\ldots,t_r(z^{r*})) \in U_{\text{М}}(R)$. Отсюда, согласно формуле (5), имеем: $u^0 = (u^0_1,\ldots,u^0_r)$ принадлежит множеству $G^F_{\text{М}}(R)$. Но тогда u^0 принадлежит и множеству $\hat{G}^F_{\text{М}}(R)$ (в силу определения последнего), что и означает его непустоту.

Доказательство предложения 2 завершено.

Используя общую теорему об условиях непустоты нечеткого ядра[1] и предложения 1 и 2 из настоящего раздела, получаем, что предположения, обеспечивающие непустоту стандартного ядра C(М), гарантируют реализуемость и существенно более тонкого принципа оптимальности.

Теорема 4. *Если модель* М *удовлетворяет условиям* ($M1$) и ($M2$), *то ее нечеткое ядро* C_F(М) *непусто*.

Работа поддержана грантами РФФИ 16-06-00101) и РГНФ 13-02-00226.

[1] См. теорему 1.1 в работе: Васильев В.А. Об одном обобщении теоремы Скарфа о непустоте ядра // Препринт № 283 ИМ СО РАН – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2012, – 41с.

Литература

1. Васильев В.А., Суслов В.И. О неблокируемых состояниях многорегиональных экономических систем // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2009. – Т. XII, № 4. – С. 23–34.
2. Гранберг А.Г., Суслов В.И., Суспицын С.А. Многорегиональные системы: экономико-математическое исследование. – Новосибирск: Наука. Сиб. Науч. Изд-во, 2007. – 371 с.
3. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. – М.: Мир, 1972. – 517 с.
4. Обэн Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. – М.: Мир, 1988. – 264 с.
5. Рокафеллар Т. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973. – 471 с.
6. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983. – 239 с.
7. Экланд И. Элементы математической экономики. – М.: Мир, 1983. – 248 с.

Информация об авторе

Васильев Валерий Александрович (Россия, Новосибирск); д.ф.-м.н., профессор, г.н.с.; Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН (просп. акад. Коптюга 4, 630090, Новосибирск, Россия; vasilev@math.nsc.ru, (383)329-75-53, факс. (383) 333-25-98)

Vasil'ev V.A.

ON THE EQUILIBRIUM IN MULTIREGIONAL SYSTEMS WITH UNBOUNDED TECHNOLOGICAL SETS

Abstract

In the paper, we consider some results obtained by application of game-theoretic methods to the equilibrium-existence problems arising in the theory of multiregional economic systems. In contrast to the most publications in the field, we do not presuppose that the regional technological capabilities are bounded. A key role in the proof of new equilibrium-existence theorem is played by generalization of the core-nonemptyness theorem to the case of fuzzy domination.

By applying methods of cooperative game theory, we elaborate a new approach to studying Walrasian equilibrium in multiregional systems. We realize this approach in two stages. First, we find out conditions, guaranteeing coincidence of the set of equilibrium allocations (plans) and fuzzy core of models of interregional relations under consideration. Second, we establish requirements providing nonemptyness of the fuzzy core of the multiregional system. Note, that the approach elaborated makes it possible to remove rather complicated Pareto-regularity assumption, applied by the author in preceding considerations of the models with unbounded technological capabilities.

Keywords: multiregional economic system, Walrasian equilibrium, fuzzy core, autarchy, "cornucopia".