УДК 338.92
ББК 65.9(2Р)+60.55

И 889 **Исследования молодых ученых: отраслевая и региональная экономика, инновации, финансы и социология** / Под ред. В.Е. Селиверстова, Н.Ю. Самсонова, И.О. Семыкиной. – Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2013. – 320 с.

ISBN 978-5-89665-262-5

Сборник статей сформирован по итогам VIII Осенней конференции молодых ученых в новосибирском Академгородке: актуальные вопросы экономики и социологии. Материалы сборника содержат результаты исследований молодых ученых по таким направлениям, как социология, управление предприятиями, математические методы и модели в экономике, проблемы отраслевого и регионального развития и инновации.

Публикуемые материалы могут содержать спорные авторские идеи и помещены в сборник с дискуссионной целью. Сборник предназначен для студентов, аспирантов, ученых, практиков и заинтересованных наблюдателей экономики России.

Конференция молодых ученых организована при поддержке Министерства образования, науки и инновационной политики Новосибирской области.

УДК 338.92
ББК 65.9(2Р)+60.55

ISBN 978-5-89665-262-5

ДОМОЖИРОВ Д.А., ГАМИДОВ Т.Г.
ИЭОПП СО РАН, Новосибирск

РАВНОВЕСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ОТКРЫТОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МЕЖРЕГИОНАЛЬНОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛЬЮ

EQUILIBRIUM STATES OF OPEN INTERREGIONAL SYSTEM BASED ON INTERREGIONAL INTERSECTORAL OPTIMIZATION MODEL

Paper deals with complicated modification of the Interregional intersectoral optimization model that considers direct exchange relations and also decreasing efficiency of foreign trade. New types of Walrasian equilibria were given for this modification of the IIOM. Tunnel algorithm for minimization of Equilibrium equation's discrepancy was developed.

Keywords: Interregional intersectoral optimization model, Walrasian Equilibria, Vector optimization, Pareto-Frontier, Global optimization methods, Tunnel algorithm

Введение

В работе [6] были рассмотрены конструкции равновесия Вальраса для упрощенного варианта оптимизационной межрегиональной межотраслевой модели (ОМММ) – модели с условным центром. Была доказана эквивалентность теоретической конструкции [1] и конструкции, эксплуатирующей двойственный аспект модели (понятие макрофинасовых балансов) [5]. Настоящая работа является логическим продолжением [6].

А именно, авторами рассматривается последний, наиболее модифицированный вариант ОМММ [2], детализировано учитывающий транспортную топологию как межрегиональных, так и внешнеторговых связей системы регионов, а также падающую эффективность внешней торговли. Данная модификация модели не позволяет сформулировать традиционную теоретическую конструкцию Вальрасовского равновесия ввиду невозможности декомпозиции общесистемной задачи оптимизации на региональные. В терминах тождеств макрофинансовых балансов для данной модели авторами сформулировано 2 новых типа равновесных состояний: равновесие в широком смысле и сильное равновесие. Отличие этих понятий от введенного ранее для данного класса моделей понятия эквивалентного обмена (см. например [3,4,5]) заключается во включении в рассмотрение внешнеторгового аспекта. А именно, в вектор равновесных цен включены новые степени свободы:

таможенные тарифы и курс иностранной валюты. Таким образом, в открытой межрегиональной системе, моделируемой с помощью ОМММ, равновесность определяется не только ценообразованием на продукты обмена, но и таможенной и валютной политикой. В рассмотренном ранее А.Г. Рубинштейном, В.И. Сусловым состоянии эквивалентного обмена равновесность означает равенство нулю всех региональных сальдо внутреннего обмена. Во введенном авторами понятии равновесия в широком смысле неэквивалентность межрегионального обмена у каждого региона компенсируется разностью его внешнеторговых сальдо во внутренних и мировых ценах с таможенными сборами. Сильным называется состояние равновесия в широком смысле, в котором к тому же имеет место эквивалентный межрегиональный обмен. В сильном равновесии, таким образом, сальдо внешней торговли в мировых и внутренних ценах у каждого региона отличаются на величину таможенных сборов. Для поиска равновесных состояний авторами была предложена оптимизационная постановка, эквивалентная модели равновесия. А именно, доказано, что состояния равновесия являются точками минимума некоторых функционалов, заданных неявным образом на единичном симплексе (пространстве территориальных структур конечного потребления). Достаточным условием равновесности является нулевое значение этих минимумов. Минимизируемые функционалы являются невязками соответсвующих равновесных тождеств. Для поиска минимума невязок авторами предложен, математически обоснован и программно реализован туннельный алгоритм минимизации функционалов, заданных неявно. Разработанный алгоритм поиска равновесий различных типов был положительно протестирован серией экспериментальных расчетов на трехрегиональном пятиотраслевом модельном комплексе («Полигон»).

Краткое описание модели

В работе [6] авторами исследовано две конструкции равновесия Вальраса для упрощенной модификации модели взаимодействия регионов (модели с условными центром). В данной модели взаимодействие регионов между собой моделируется упрощенно. А именно, транспортные связи регионов между собой не детализированы: у переменных вывоза/ввоза есть только один региональный индекс – индекс вывозящего/ввозящего региона. В модели имеет место нулевой баланс ввоза вывоза, означающий замкнутость экономики (общий ввоз равен общему вывозу). Граф транспортных связей такой межрегиональной системы (вершины – регионы, дуги - связи) удобно представлять с наличием условного центра – виртуального контрагента, через который обмениваются между собой все регионы:

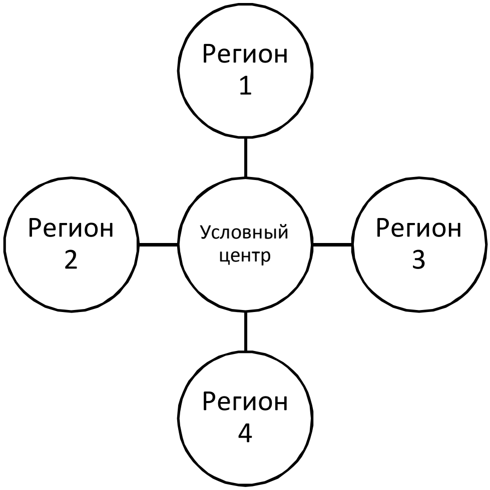

Рис 1. Топология модели с условным центром

Первое – традиционное определение равновесия Вальраса, формулируется для модели взаимодействия регионов (прямым и ближайшим аналогом ее служит модель экономики типа Эрроу-Дебре). Согласно этому определению [1], равновесность некоторого сбалансированного плана заключается в существовании таких цен обмена, для которых каждая региональная компонента указанного плана максимизирует целевую функцию соответствующего региона на бюджетном относительно данных цен множестве. Вторая конструкция формулируется в терминах ассоциированной с моделью экономики задачи векторной линейной оптимизации. Региональные целевые критерии в этой задаче агрегированы в общесистемный с помощью точки единичного симплекса методом, известным в литературе по многокритериальной оптимизации как метод достижения целей [8]. Точка единичного симплекса $\vec{\lambda}$ (вектор территориальной структуры конечного потребления) параметризует в критериальном пространстве Парето-границу задачи векторной оптимизации.

Согласно второму подходу равновесным называется такой вектор территориальной структуры конечного потребления $\vec{\lambda}$ (читай «такое Парето-оптимальноое состояние системы регионов»), для которого выполнено тождество эквивалентного обмена, сформулированное в терминах оптимального прямого и двойственного планов задачи с этим $\vec{\lambda}$.

В работе [6] доказывается эквивалентность двух этих определений равновесия для модели с условным центром.

В данной работе рассматривается последний наиболее модифицированный вариант модели межрегиональной модели. Субъекты обмена в данной постановке разделены на две группы – регионы ($r, s \in R$) и внешние рынки ($\bar{k} \in K$) (то есть межрегиональная система является открытой). Граф транспортных связей системы может иметь произвольную структуру. Транспортные связи подразумевается прямыми. То есть для каждой пары регионов $r, s \in R$ существует переменные межрегионального перевозок x^{rs} и x^{sr}. А также для каждой пары регион-внешний рынок $\bar{k}, r$ существуют переменные внешнеторговых перевозок - экспорта $v^{r\bar{k}}$ и импорта $v^{\bar{k}r}$ (внешняя торговля эндогенна). Размерность данных переменных равна количеству транспортабельных отраслей. При этом у каждой перевозки может быть один или несколько транзитеров. Граф транспортных связей такой модификации межрегиональной модели удобно задавать с помощью квадратной матрицы размерности $|R| + |K|$), позиция в которой означает индекс перевозки, а значение элемента – список регионов-участников этой перевозки (отправитель, все транзитеры и получатель). Матрица транспортной топологии системы порождает семейство матриц транспортных способов (межрегиональных и внешнеторговых). Принцип построения транспортных матриц для межрегиональных перевозок $C_r^{ss'}$и для импортно-экспортных перевозок $D_r^{\bar{k}s}, D_r^{s\bar{k}}$ см. в подробном описании модели [2].

Для данной модификации модели авторами эксплуатируется как раз второй подход к определению равновесия (тождества макрофинансовых балансов, сформулированные в терминах оптимального прямого и двойственного плана задачи линейного программирования). Нетривиальная транспортная топология межрегиональной системы в данном случае не допускает декомпозицию системы на региональные составляющие (для построения задач максимизации отдельного региона на его бюджетном множестве). Это обстоятельство не позволяет напрямую наследовать традиционное определение Вальрасовского равновесия от модели с условным центром.

В настоящем разделе приведем математическое описание прямой и двойственной задачи с сохранением обозначений [2]. Перед знаком двоеточия в записи каждого ограничения приведено обозначение двойственной оценки этого ограничения.

Прямая задача

Региональный блок региона r (внутреннее балансовое ограничение – «Закон сохранения экономической материи»):

$$y^r: \quad A^r x^r + H\left(\sum_{s,s'\in S} C_r^{ss'} x^{ss'} + \sum_{\bar{k},s\in S} D_r^{\bar{k}s} \nu^{\bar{k}s} + \sum_{\bar{k},s\in S} D_r^{s\bar{k}} \nu^{s\bar{k}}\right) + \alpha^r z^r \le q^r, (1.1)$$

Заметим, что мы для удобства используем агрегированную запись. А именно, в x^r включены компоненты, соответствующие приростным способам объемов производства, инвестициям. В A^r – столбцы технологических коэффициентов приростных способов производства, коэффициентов инвестиционных способов, а также строки, соответствующие балансу инвестиций, труда, ограничениям сверху на производство и инвестиции. То же самое касается вектора правых частей q^r. Кроме того, векторы импорта и экспорта также содержат компоненты всех приростных способов i_ν. А именно, векторы импорта и экспорта представляют собой построчную конкатенацию всех способов в порядке их эффективности, например:

$$\nu^{\bar{k}s} = \begin{pmatrix} \nu_{i_{\nu_1}}^{\bar{k}s} \\ \nu_{i_{\nu_2}}^{\bar{k}s} \\ \cdots \\ \nu_{i_{\nu_N}}^{\bar{k}s} \end{pmatrix}$$, где -количество импортных способов.

Матрицы $D_r^{\bar{k}s}$ и $D_r^{s\bar{k}}$, в свою очередь, представляют собой постолбцовую конкатенацию N одинаковых подматриц (коэффициенты транспортных затрат одинаковы по всем внешнеторговым способам), например:

$$D_r^{\bar{k}s} = \begin{pmatrix} \widetilde{D}_r^{\bar{k}s} & \cdots & \widetilde{D}_r^{\bar{k}s} \end{pmatrix}$$

Ограничения на территориальную структуру конечного потребления

$$\omega^r: z^r - \lambda^r z \le 0 \qquad (1.2)$$

Ограничение внешнеторгового баланса

$$\$ \ : \sum_{\bar{k},s\in S} g_{\$}^{\bar{k}+} \cdot \nu^{\bar{k}s} - \sum_{\bar{k},s\in S} g_{\$}^{-\bar{k}} \cdot \nu^{s\bar{k}} \le -\bar{S}_{\$} \quad (1.3)$$

Верхние границы способов импорта/экспорта

$$\tau_\nu^{-\bar{k}}, \tau_\nu^{+\bar{k}}: \qquad \sum_{s\in S} \nu^{\bar{k}s} \le \hat{\nu}^{-\bar{k}}$$

$$\sum_{s\in S} \nu^{s\bar{k}} \le \hat{\nu}^{\bar{k}+} \qquad (1.4)$$

" $\cdot$ "- знак скалярного произведения. Подразумевается, что в векторах объемов внешней торговли компоненты сгруппированы и упорядочены по индексу продукта (отрасли) j и способа импорта/экспорта i_ν. Аналогично – векторы внешнеторговых цен. Падающая эффективность внешней торговли реализована в виде отдельного вектора внешнеторговых цен для каждого способа импорта/экспорта. Дополнительные единицы объема импорта закупаются по более дорогой цене, экспорта – реализуются по более дешевой. Поэтому вектора импортных цен $g_{\$}^{\bar{k}+}$ растут с ростом индекса способа импорта, а компоненты вектора экспортных цен $g_{\$}^{-\bar{k}}$– убывают. При этом в моделировании падающей эффективности сегментов внешнего рынка подразумевается, что каждый регион по отдельности не может объемами своей внешней торговли влиять на мировые цены - влияние оказывают только общесистемные объемы. По этой причине у векторов внешнеторговых цен нет индекса региона. Значение цены определяется сегментом внешнего рынка $\bar{k}$, внешнеторговым способом i_v и транспортабельной отраслью j. По той же причине верхние границы на способы импорта и экспорта, контролирующие эластичность мировых цен по объемам внешней торговли являются общерегиональными, но детализированными по сегментам внешнего рынка. Компоненты этих верхних границ $(\hat{v}^{-\bar{k}}, \hat{v}^{\bar{k}+})$ монотонно возрастают по индексу способа i_v и сгруппированы по транспортабельным отраслям j.

Общие таможенные квоты:

$$\bar{\tau}_v^-, \bar{\tau}_v^+: \qquad \sum_{s\in S,\bar{k},i_v} v_{i_v}^{\bar{k}s} \le \bar{v}^-$$

$$\sum_{s\in S,\bar{k},i_v} v_{i_v}^{s\bar{k}} \le \bar{v}^+ \ (1.5)$$

Значения импортно-экспортных квот определяются только индексом транспортабельного продукта j

Целевая функция

$$z \to max(1.6)$$

Двойственная задача

Региональный блок региона r

$$x^r: \qquad (A^r)^T y^r \ge 0 \qquad (2.1)$$

$$z^r: \alpha^{r^T} y^r - \omega^r \ge 0 \qquad (2.2)$$

$$x^{ss'}: \sum_{r\in R} C_r^{ss'^T} y^r \ge 0 \qquad s, s' \in \boldsymbol{R} \qquad (2.3)$$

$$v_{i_v}^{\bar{k}s}: \sum_{r\in S} \widetilde{D}_r^{\bar{k}s^T} y^s + \$ g_{\$i_v}^{\bar{k}+^T} + \tau_{vi_v}^{-\bar{k}} + \bar{\tau}_v^- \ge 0 \qquad s \in \boldsymbol{R} \qquad (2.4)$$

$$v_{i_v}^{s\bar{k}}: \sum_{r\in S} \widetilde{D}_r^{s\bar{k}^T} y^s - \$ \ \ g_{\$i_v}^{-\bar{k}^T} + \tau_{vi_v}^{\bar{k}+} + \bar{\tau}_v^+ \ge 0 \qquad s \in \boldsymbol{R} \qquad (2.5)$$

Общесистемное ограничение

$$z \quad : \lambda^r \omega^r \geq 1 (2.6)$$

Целевая функция

$$\sum_{r \in \boldsymbol{R}} q^r \cdot y^r - \$ \;\; \bar{S}_{\$} \;\; + \sum_{\bar{k}} \left(\hat{v}^{-\bar{k}} \cdot \tau_{v}^{-\bar{k}} + \hat{v}^{+} \cdot \tau_{v}^{\bar{k}+} \right) + \bar{v}^{+} \cdot \; \bar{\tau}_{v}^{+} + \bar{v}^{-} \cdot \; \bar{\tau}_{v}^{-} \rightarrow min \qquad (2.7)$$

Равновесия Вальраса в модели с открытой торговлей

Заметим, что для полной модификации модели, в отличие от модификации с условным центром, традиционная конструкция равновесия Вальраса недопустима. Причина тому - нетривиальная транспортная топология системы. Данная топология не допускает естественную декомпозицию общесистемной задачи максимизации на региональные. Для описания равновесных постановок в рамках полной модификации модели воспользуемся прикладной конструкцией, использующей теорию двойственности задач линейного программирования. Вопрос построения математической конструкции равновесия Вальраса для полной модификации модели, близкой к классической постановке для модели с условными центрами пока остается открытым. Для формального определения приведем сначала некоторое математические выкладки и введем определение макрофинансовых балансов.

Выделим в оптимальном значении прямой задачи региональные компоненты. Для этого запишем условия дополняющей нежесткости для ограничений (1.2) и просуммируем их по $r \in R$:

$$\left(\sum_{r \in R} \lambda^r \omega^r \right) z = \sum_{r \in R} \omega^r z^r$$

Просуммирванные по $r \in R$ условия дополняющей нежесткости для (2.6) дают

$$\left(\sum_{r \in R} \lambda^r \omega^r \right) z = z$$

Итак, последние два соотношения в дают нам разложение оптимального значения функционала прямой задачи на региональные компоненты:

$$z = \sum_{r \in R} \omega^r z^r$$

Аналогично поступим с оптимальным значением двойственного функционала. С учетом условий дополняющей нежесткости для (1.3)-

(1.5) оптимальное значение двойственной задачи следующим образом раскладывается на региональные компоненты:

$$\sum_{r\in R}\left(q^r y^r - \$\left(\sum_{\bar{k}} g_{\$}^{\bar{k}+}\cdot \nu^{\bar{k}r} - g_{\$}^{-\bar{k}}\cdot \nu^{r\bar{k}}\right) + \sum_{\bar{k}}\left(\nu^{r-\bar{k}}\cdot \tau_{\nu}^{-\bar{k}} + \nu^{r\bar{k}+}\cdot \tau_{\nu}^{\bar{k}+}\right) + \bar{\tau}_{\nu}^{+}\cdot\left(\sum_{\bar{k},i_\nu}\nu_{i_\nu}^{\bar{k}r}\right) + \bar{\tau}_{\nu}^{-}\cdot\left(\sum_{\bar{k},i_\nu}\nu_{i_\nu}^{r\bar{k}}\right)\right)$$

Введем обозначения:

$Q^r := q^r y^r$ - стоимость ресурсного потенциала региона r.

$\bar{S}_\nu^r := \$\left(\sum_{\bar{k}} g_{\$}^{\bar{k}+}\cdot \nu^{\bar{k}r} - g_{\$}^{-\bar{k}}\cdot \nu^{r\bar{k}}\right)$ – внешнеторговое сальдо региона r в мировых ценах, выраженное во внутренней валюте.

$P_\nu^r := \sum_{\bar{k}} P_\nu^{r\bar{k}} = \sum_{\bar{k}}\left(\hat{\nu}^{r-\bar{k}}\cdot \tau_{\nu}^{-\bar{k}} + \hat{\nu}^{r\bar{k}+}\cdot \tau_{\nu}^{\bar{k}+}\right)$ - общая стоимость таможенных сборов на использование способов импорта и экспорта, обеспечивающих торговые объемы $\left\{\hat{\nu}_{i_\nu}^{r-\bar{k}}, +\hat{\nu}_{i_\nu}^{r\bar{k}+}\right\}_{i_\nu}$ ($P_\nu^{r\bar{k}}$ – то же самое для конкретного внешнего рынка), собранных за счет внещнеторговых оборотов региона r. Этот агрегат можно интерпретировать как таможенные сборы по прогрессивной тарифной сетке, подразумевающей дополнительную плату за дополнительные внешнеторговые объемы на конкретном сегменте внешнего рынка (для каждого способа i_ν и внешнего рынка $\bar{k}$ свой набор тарифов $\tau_{\nu,i_\nu}^{-\bar{k}}, \tau_{\nu,i_\nu}^{\bar{k}+}$). Причем, тариф $\left\{\tau_{\nu,i_\nu,j}^{-\bar{k}}, \tau_{\nu,i_\nu,j}^{\bar{k}+}\right\}$ взимается, только если для продукта j на рынке $\bar{k}$ достигнуты торговые объемы $\left\{\hat{\nu}_{i_\nu,j}^{r-\bar{k}}, +\hat{\nu}_{i_\nu,j}^{r\bar{k}+}\right\}$.

$T^r := \bar{\tau}_\nu^{+}\cdot\left(\sum_{\bar{k},i_\nu}\nu_{i_\nu}^{\bar{k}r}\right) + \bar{\tau}_\nu^{-}\cdot\left(\sum_{\bar{k},i_\nu}\nu_{i_\nu}^{r\bar{k}}\right)$-сумма дополнительных таможенных сборов на экспорт и импорт, когда исчерпаны все импортно-экспортные квоты. Эти сборы взимаются по единым для всех внешних рынков тарифам $(\bar{\tau}_\nu^{+}, \bar{\tau}_\nu^{-})$, причем тариф для конкретной транспортабельной отрасли ненулевой только в том случае, если по данному продукту системой достигнуты соответствующие квоты импорта/экспорта.

С учетом первой теоремы двойственности, оптимальные значения прямой и двойственной задачи равны, то есть

$$\boxed{\sum_{r\in R}\left(\omega^r z^r + \bar{S}_\nu^r\right) = \sum_{r\in R}\left(Q^r + T^r + P_\nu^r\right)}$$

Данное соотношение называется общесистемным макрофинансовым балансом. Его содержательный смысл в том, что стоимость конечного потребления системы регионов с падающей эффективностью сегментов внешнего рынка с учетом внешней торговли в мировых ценах скадывается из ресурсного потенциала и таможенных сборов.

Выведем региональный аналог этого соотношения. В следующих выкладках под знаком равенства подписаны номера ограничений, для которых мы используем соотношения дополняющей нежесткости в данном алгебраическом переходе.

$$\omega^r z^r \underbrace{=}_{(2.2)} (\alpha^r \cdot y^r) z^r \underbrace{=}_{(1.1)} Q^r - y^r \cdot$$
$$\cdot \left(A^r x^r + \sum_{s,s' \in R} C_r^{ss'} x^{ss'} + \sum_{\bar{k},s \in R} D_r^{\bar{k}s} v^{\bar{k}s} + \sum_{\bar{k},s \in R} D_r^{s\bar{k}} v^{s\bar{k}} \right)$$
$$= Q^r - \underbrace{y^r \cdot (A^r x^r)}_{=0\ (2.1)} - \underbrace{y^r \cdot \left(\sum_{s,s' \in R} C_r^{ss'} x^{ss'} \right)}_{\text{обозначим } S^r}$$
$$\underbrace{- y^r \cdot \left(\sum_{\bar{k},s \in R} \left(D_r^{\bar{k}s} v^{\bar{k}s} + D_r^{s\bar{k}} v^{s\bar{k}} \right) \right)}_{\text{обозначим } S_v^r}$$

В последнем соотношении

S^r- сальдо межегионального обмена региона r, выраженное во внутренних ценах обмена.

S_v^r-сальдо внешней торговли региона r, выраженное во внутренних ценах во внутренней валюте.

Итак, макрофинансовый баланс отдельного региона записывается следующим образом:

$$\boxed{\omega^r z^r + S^r + S_v^r = Q^r}$$

То есть в любом состоянии системы $(\lambda^r)_{r \in R}$ стоимость конечного потребления каждого региона во внутренних ценах с учетом межрегионального обмена и внешней торговли совпадает с его ресурсным потенциалом.

Для связи региональных макрофинансовых балансов с общесистемным сначала заметим, что по соотношениям дополняющей нежесткости для (2.3), просуммированным по s, s' имеем

$$\boxed{\sum_{r \in R} S^r = 0}$$

Таким образом, в любом состоянии системы $(\lambda^r)_{r \in R}$ общесистемное сальдо межрегионального обмена во внутренних ценах равно нулю. Заметим, что для конкретного региона данное соотношение в общем случае не выполнено.

Далее, запишем условия дополняющей нежесткости для ограничений (2.4)-(2.5), просуммированные по $\bar{k}, i_v$ и сложенные между собой:

$$\sum_{\bar{k},r}\left(v^{\bar{k}s}\cdot\left(D_{r'}^{\bar{k}s}\right)^T y^r \quad + v^{s\bar{k}}\cdot\left(D_{r'}^{s\bar{k}}\right)^T y^r \quad\right) - S_v^s + T^s + P^s = 0;$$

$$\sum_{\bar{k},r} y^r \quad \cdot\left(D_r^{\bar{k}s} v^{\bar{k}s} + D_r^{s\bar{k}} v^{s\bar{k}}\right) = \bar{S}_v^s - T^s - P^s;$$

Просуммируем последнее соотношение по $s \in R$, переобозначим в правой части индекс суммирования с s на r, воспользуемся последними обозначениями для S_v^r и получим:

$$\underbrace{\sum_{r\in R} S_v^r}_{\text{обозначим } S_v} \quad = \quad \underbrace{\sum_{r\in R} \bar{S}_v^r}_{\text{обозначим } \bar{S}_v} \quad - \quad \underbrace{\sum_{r\in R} T^r}_{\text{обозначим } T} \quad - \quad \underbrace{\sum_{r\in R} P_v^r}_{\text{обозначим } P_v}$$

$$\boxed{\bar{S}_v \ - S_v \ = T + P_v}$$

Последнее соотношение назовем внешнеторговым тождеством. Таким образом, в любом Парето-оптимальном состоянии системы разница общесистемного внешнеторгового сальдо в мировых и внутренних ценах уравновешивается таможенными сборами. Данное соотношение связывает процесс внутреннего ценообразования, валютную политику и таможенную тарификацию. Заметим, что региональный аналог данного равенства в общем случае не выполнен.

Пользуясь представлением для общесистемного внешнеторгового сальдо можно переписать общий макрофинансовый баланс во внутренних ценах – то есть в виде, сопоставимом с региональным аналогом:

$$\boxed{\sum_{r\in R}(\omega^r z^r + S_v^r) = \sum_{r\in R} Q^r}$$

Для различных вариантов записи макрофинансового баланса можно предложить различные варианты равновесных постановок. В каждом случае равновесное состояние конструтивно означает равенство всех региональных компонент общесистемного макрофинансового баланса

Исходя из общесистемного макрофинансового баланса во внутренних ценах

$$\sum_{r\in R}(\omega^r z^r + S_v^r) = \sum_{r\in R} Q^r$$

можно сформулировать первую концепцию равновесия как состояния эквивалентного обмена. Для данной записи невязкой между региональными компонентами правой и левой частей общесистемного макрофинансового баланса в соответствии с макрофинансовым балансом региона r будет сальдо межрегионального обмена:

$$Q^r - (\omega^r z^r + S_v^r) = S^r$$

Состоянием эквивалентного обмена (равновесием в классическом смысле) назовем такое Парето-оптимальное состояние системы $(\lambda^r)_{r\in R}$, в котором

$$\boxed{S^r = 0\ \forall\, r \in R}$$

В вектор равновесных цен в этом случае будут входить только цены обмена. Содержательное значение равновесия в классическом смысле – наличие таких цен внутреннего обмена $p_r^{rs} = {y^r}^T C_r^{rs}, p_r^{sr} = {y^r}^T C_r^{sr}$, что в данных ценах стоимость внутреннего спроса (ввоза) каждого региона уравновешивается стоимостью внутреннего предложения (вывоза), и конечное потребление региона при этом максимально.

Исходя из общесистемного макрофинансового баланса с внешней торговлей в мировых ценах

$$\sum_{r\in R}(\omega^r z^r + \bar{S}_v^r) = \sum_{r\in R}(Q^r + T^r + P_v^r)\ ,$$

невязка региональных компонент правой и левой части тождества в соответсвии с макрофинансовым балансом региона r будет состоять из двух компонент (первая-невязка межрегионального):

$$Q^r + T^r + P_v^r - (\omega^r z^r + \bar{S}_v^r) \underbrace{=}_{\pm S^r, \pm S_v^r} \underbrace{[Q^r - (\omega^r z^r + S^r + S_v^r)]}_{=0} + S^r + [S_v^r - (\bar{S}_v^r - T^r - P_v^r)]$$

Равновесием в широком смысле назовем такое Парето-оптимальное состояние, в котором

$$\boxed{S^r = (\bar{S}_v^r - S_v^r) - (T^r + P_v^r)\ \forall r \in R}$$

Поскольку в нашей постановке мировые цены (товарные курсы), хоть и эластичны по объемам внешней торговли, все же экзогенны, в вектор равновесных цен в данном случае будут входить внутренние цены обмена, таможенные тарифы и валютный курс ($ - оценка ограничения торгового баланса). Заметим, что в цены обмена региона r в данном случае входят ввозные и вывозные цены межрегионального обмена $\left(p_r^{rs} = {y^r}^T C_r^{rs}, p_r^{sr} = {y^r}^T C_r^{sr}\right)$ и внутренние цены франко-граница импортируемой и экспортируемой продукции $(\bar{p}_r^{\bar{k}r} = {y^r}^T D_r^{\bar{k}r}, \bar{p}_r^{r\bar{k}} = {y^r}^T D_r^{r\bar{k}})$. Причем цены межрегионального и внешнеторгового обмена в рамках рыночного механизма, реализованного в модели, варьируются не независимо друг от друга, а совместно, так как в их определении единственная и общая степень свободы – вектор оценок y^r.

Содержательное значение равновесия в широком смысле – наличие таких цен обмена, таможенных тарифов и валютного курса, при которых разница внутреннего спроса-предложения каждого региона уравновешивается невязкой разницы внешнеторговых сальдо во внутренних и внешних ценах и таможенных сборов, и конечное потребление региона при этом максимально. Рыночный механизм, реализующий данный тип равновесия затрагивает не только внутреннее ценообразование на продукты обмена, но и также таможенную и валютную политику государства.

Сильным равновесием назовем такое состояние равновесия в широком смысле, в котором для каждого региона имеет место эквивалентный межрегиональный обмен:

$$\boxed{\begin{cases} S^r = 0, \\ \bar{S}_v^r - S_v^r = T^r + P_v^r. \end{cases} \forall r \in R}$$

Первое соотношение отвечает за эквивалентность межрегионального обмена, второе – за внешнеторговое ценообразование, оптимальную таможенную и валютную политику. В состоянии сильного равновесия в широком смысле на первый взгляд процесс внутреннего ценообразования (рыночное регулирование) отделен от таможенной и валютной политики (государственное регулирование). Но это не так, потому что внутренние цены межрегионального обмена и внутренние импортно-экспортные цены (во втором соотношении они в агрегате S_v^r), как было замечено выше, содержат единственную и общую степень свободы – вектор оценок региональных балансовых ограничений y^r. Поэтому в механизме достижения состояния равновесия данного типа процесс государственного регулирования неотделим от процесса внутреннего ценообразования.

Оптимизационная постановка задачи поиска равновесий. Туннельный алгоритм поиска равновесий

Параметрическая задача линейного программирования (1.1)-(1.6) с параметром территориальной структуры λ описывает в критериальном пространстве Парето-границу системы взаимодействия регионов. А именно, оптимальный план этой задачи, соответсвующий фиксированному на единичном симплексе вектору территориальной структуры конечного потребления соотвествует Парето-оптимальному состоянию задачи векторной оптимизации.

Для поиска состояния эквивалентного обмена в прикладных исследованиях по ОМММ использовался итерационный эвристический алгоритм [5]. Он заключается в специальной корректировке компонент вектора λ на текущей итерации и последующем решении задачи оптимизации. А именно:

$$\bar{z}_k^r := \frac{\omega_k^r z_k^r + S_k^r}{\omega_k^r}$$

$$\lambda_{k+1}^r := \frac{\bar{z}_k^r}{\sum_{r \in R} \bar{z}_k^r}$$

Этот алгоритм является эффективным, так как не предполагает перебора всех Парето-оптимальных состояний. Сходимость и эффективность данного алгоритма математически не доказана, но они подтверждаются экспериментальными расчетами.

Эвристический алгоритм поиска эквивалентного обмена с очевидной аналогией был распространен авторами на поиск равновесия в широком смысле:

$$\bar{z}_k^r := \frac{Q_k^r + T_k^r + P_{kv}^r - \bar{S}_{kv}^r}{\omega_k^r}$$

$$\lambda_{k+1}^r := \frac{\bar{z}_k^r}{\sum_{r\in R} \bar{z}_k^r}$$

Последний эвристический алгоритм был протестирован на практике, он за несколько итераций (как правило, меньше 10) приводит к равновесию в широком смысле.

Данные итерационные процессы по своей сути являются специально заданным обходом Парето-границы с проверкой равновесности каждой точки пребывания. Их главное достоинство – эффективность.

Авторами были предприняты попытки построения итерационного процесса, сходящегося к сильному равновесию, но все они были безуспешными. Но никакое комбинирование процессов, приводящих к нулевой невязке эквивалентного обмена и к нулевой невязке равновесности в широком смысле, ничего не дало для зануления общей (двухкомпонентной) невязки сильного равновесия. Сложность заключается именно в многокомпонентности невязки сильного равновесия. По этой причине авторами был предложен другой подход к поиску равновесных состояний, обходящий эту проблему.

В силу теории двойственности задач линейного программирования, оптимальный план одновременно прямой и двойственной задачи при фиксированном (λ) можно получить как решение системы неравенств, включающей ограничения прямой задачи (1.1)-(1.6), двойственной задачи (2.1)-(2.7) и равенство выражений для целевых функций прямой (1.6) и двойственной задачи (2.7):

$$z = \sum_{r\in R} (Q^r - \bar{S}_v^r + P^r + T^r) \qquad (3.1)$$

Таким образом, проекция на критериальное пространство решений системы (1.1)-(1.6)-(2.1)-(2.7)-(3.1) (обозначим ее для удобства (*))для всех λ является Парето-границей нашей системы регионов.

Задача поиска равновесия по своей сути является поиском на Парето-границе таких состояний, для которых выполнены соответствующие равновесные тождества.

Предлагается свести задачу поиска равновесий к задаче минимизации функционалов невязки равновесных тождеств как функций параметра λ на допустимом множестве (*), соответствующем всей Парето-границе. Зависимость данных функционалов от λ является неявной, то есть выражения для функционалов невязки не содержит параметра λ, а только переменные системы (*). Переменные системы (*), в свою очередь уже связаны с параметром λ через некоторые из ограничений.

Положим $\mathrm{F}_1 \coloneqq \sum_{\mathrm{r}\in\mathrm{R}}(\mathrm{S}^{\mathrm{r}})^2$- квадрат длины вектора невязки тождества эквивалентного обмена

$\mathrm{F}_2 \coloneqq \sum_{\mathrm{r}\in\mathrm{R}}(S^r + \bar{\mathrm{S}}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}} - \mathrm{S}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}} - \mathrm{T}^{\mathrm{r}} - \mathrm{P}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{r}})^2$ - то же самое для тождества равновесия в широком смысле.

$F_3 \coloneqq F_1 + F_2 = \sum_{r\in R}((S^r)^2 + (\bar{S}_v^r - S_v^r - T^r - P_v^r)^2)$ - для тождества сильного равновесия.

Лемма 1

Если на оптимальном решении задачи

$$\begin{cases} F_i \to min \\ (*) \\ 0 \le \lambda^r \le 1 \; \forall \, r \in R \\ \sum\limits_{r\in R} \lambda^r = 1 \end{cases} \quad (**)$$

$F_i = 0$, то $\vec{\lambda}_{min}$ – состояние эквивалентного обмена (при $i = 1$), равновесие в широком смысле (при $i = 2$), сильное равновесие (при $i = 3$).

Доказательство данного утверждения очевидно. Стоит лишь отметить, что функционалы F_i построены таким образом, чтобы их нулевое значение достигалось на равновесии соответсвующего типа. В силу корректности исходной задачи (1.1)-(1.) данные функционалы непрерывны по λ и неотрицательны, единичный симплекс является компактом, а значит задача (**) разрешима и $\min_{**} F_i \ge 0$. И если соответсвующее равновесие существует, то $\min_{**} F_i = 0$. Случай $\min_{**} F_i > 0$ означает несуществование равновесия типа i в нашей системе регионов.

Оптимизационная постановка задачи поиска равновесных состояний позволяет унифицировать процесс их поиска. Вообще говоря, отрываясь от контекста равновесий в многорегиональных системах, данный подход справедлив для произвольной задачи векторной линейной оптимизации. Он позволяет выделить из всей Парето-границы подмножество состояний, удовлетворяющих некоторой системе уравнений, сформулированной в терминах параметров, прямых и двойственных переменных исходной задачи оптимизации.

Задача (**) является задачей оптимизации неявной функции по параметру. Решить задачу аналитически или хотя бы получить аналитическое выражение для градиента минимизируемой функции по параметрам представляется затруднительным.

Предлагается туннельный алгоритм поиска глобального экстремума функций F_i. Точку рекорда (локального экстремума) данной функции предлагается искать обычным релаксационным методом (задавать в точке поле возможных направлений по λ и двигаться в сторону наискорейшего спуска).

Суть туннельного алгоритма состоит в том, чтобы после отыскания очередной точки λ локального минимума функции F_i ищется точка λ_*, удовлетворяющая условию $F_i(\lambda_*) < F_i(\lambda)$ и отличная от λ. Из нее как из начальной точки производится очередной локальный спуск.

Шаг k

Положим, $\lambda_k = (\lambda_k^r)_{r\in R}$ – точка локального минимума F_i. Определим туннельную (штрафную) функцию в виде:

$$T(\lambda) = T(\lambda|\lambda_k, \alpha) \coloneqq \frac{F_i(\lambda) - F_i(\lambda_k)}{\|\lambda - \lambda_k\|^\alpha},$$

Где α – параметр.

Начиная из точек вида $(\lambda_k^r \pm \delta)_{r\in R}$, где δ - некоторое малое число, последовательно применяем алгоритм локального спуска для минимизации туннельной функции до тех пор, пока не найдется хотя бы одна точка λ_k^* ее локального минимума. Вновь применяем метод локального спуска минимизации функционала F_i, начиная из точки λ_k^*. Получаем точку λ_k^{**}.

Возможны два случая:

1) $F_i(\lambda_k^{**}) \le F_i(\lambda_k^*)$, $\lambda_k^{**} \ne \lambda_k^*$. Тогда переходим на следующий шаг, задав $\lambda_{k+1} = \lambda_k^{**}$
2) $F_i(\lambda_k^{**}) > F_i(\lambda_k^*)$, $\lambda_k^{**} \ne \lambda_k^*$. Тогда
   А) Если $k \le K$, где K - некоторое фиксированное число, то увеличиваем значение параметра α и переходи на шаг $k+1$, задав $\lambda_{k+1} = \lambda_k$.
   Б) Если $k > K$, то дальнейшие вычисления прекращаются. Точка λ_k является точкой глобального минимума функционала F_i и при нулевом значении минимума задает равновесие типа i в нашей межрегиональной системе.

Начальное приближение λ_0 получается методом локального спуска функционала F_i из некоторой произвольной точки единичного симплекса.

Данный алгоритм является конечным и сходящимся ввиду корректности задачи (**) и результатам теории оптимизации [7]. Но к сожалению, этот алгоритм нельзя назвать эффективным по двум причинам. Во-первых, не имея аналитического выражения для градиентов минимизируемых функций, приходится на этапе локального спуска рассматривать все поле возможных направлений из начальной точки. Во-вторых, туннельная функция T при разумных значениях параметра α является маломеняющейся и близкой к нулю в значительной части рассматриваемой области.

Но тем не менее, полученный алгоритм был программно реализован и положительно протестирован серией экспериментальных расчетов. Экспериментальные расчеты проводились на трехрегиональном (Запад, Центр, Восток) пятиотраслевом модельном комплексе («Полигон»). Две отрасли являются транспортабельными (добыча, обработка). Внешняя торговля реализована двумя внешними рынками (Западный и Восточный). Топология системы предполагается линейчатой:

Рис. 2. Топология трехрегиональной системы условного примера

Были проведены расчеты по поиску состояния эквивалентного обмена и равновесия в широком смысле итерационными эвристическими алгоритмами, а также по поиску равновесий всех трех типов с помощью туннельного алгоритма. По результатам серии расчетов можно сделать следующие выводы:

1) Авторская модификация эвристического алгоритма для равновесия в широком смысле показала свою работоспособность и эффективность (как и в случае с эквивалентным обменом сходимость к равновесию за менее чем 10 итераций).

2) Туннельный алгоритм показал свою работоспособность для равновесий всех типов, но проигрывает эвристическим алгоритмам в быстродействии. Тем не менее, время расчета равновесий с помощью туннельного алгоритма является обозримым (около 3 минут на обычном ПК для 3 регионов, и пяти отраслей)

3) Результаты работы эвристических алгоритмов и туннельного алгоритма для эквивалентного и равновесия в широком смысле. обмена полностью совпадают.

4) С помощью туннельного алгоритма удалось получить состояние сильного равновесия. Для этого пришлось некоторым образом модифицировать входные данные, поскольку на эталонном варианте входных данных такового не существовало ($\min F_3 > 0$). Ниже для наглядности приведены таблицы макрофинансовых балансов во внутренних и мировых ценах (соответствуют двум равновесным тождествам) на рассчитанном сильном равновесии. Порядок невязки, отнесенной к общесистемному целевому функционалу в обоих случаях равен не более $5 \cdot 10^{-3}$. Это свидетельствует о том, что рассчитанное состояние $\vec{\lambda} = (0;\ 471;\ 0;\ 334;\ 0;\ 195)$ с хорошим приближением можно назвать сильным равновесием.

Таблица 1

Макрофинансовые балансы на сильном равновесии

	Запад	Центр	Восток	**Итого**
Q^r	1647,277	1356,439	657,307	**3661,023**
S^r	-7,281	-0,207	7,488	**0**
S_v^r	6,641	39,106	-96,006	**-50,259**
$\boldsymbol{\omega^r z^r}$	**1647,917**	**1317,54**	**745,825**	**3711,282**
Правая часть	**1640,635**	**1317,333**	**753,313**	**3711,282**
Невязка	-7,281	-0,207	7,488	**0**
Q^r	1647,277	1356,439	657,307	**3661,023**
$\bar{S}_v^r$	0	-62,851	62,851	**0**
Таможенные сборы	0	17,103	33,156	**50,259**
$\omega^r z^r$	1647,917	1317,54	745,825	**3711,282**
Левая часть	**1647,917**	**1380,391**	**682,975**	**3711,282**
Правая часть	**1647,277**	**1373,543**	**690,462**	**3711,282**
Невязка	-0,64	-6,846	7,488	**0**

Заключение

Результаты проведенного исследования можно резюмировать следующим образом. Основным теоретическим результатом стала формулировка и интерпретация новых математико-экономических конструкций, возникших именно в данной модификации модели:

- Внешнеторговое тождество, согласно которому во всей системе в целом разность между сальдо внешней торговли во внутренних и мировых ценах (все во внутренней валюте) равно общим таможенным сборам. (Региональные аналоги такого тождества, вообще говоря, неверны)

- Равновесие в широком смысле: неэквивалентность межрегионального обмена у всех регионов компенсируется невязкой регионального внешнеторгового тождества.
- Сильное равновесие: имеет место и эквивалентный межрегиональный обмен, и выполнены все региональные аналоги внешнеторгового тождества.

Вторым значимым теоретическим результатом стала формулировка и обоснование оптимизацонной постановки поиска равновесий всех указанных типов. В отличие от используемого ранее в прикладных исследования итерационного метода поиска состояния эквивалентного обмена, сформулированный подход теоретически обоснован и позволяет унифицировать процесс поиска Вальрасовских равновесий различных типов. Вторым достоинством данного подхода является универсальность. А именно, в отрыве от контекста равновесных состояний межрегиональных моделей данный подход позволяет «фильтровать» Парето-оптимальные состояния некоторой произвольной линейной задачи векторной оптимизации по некоторой системе соотношений между оптимальными значениями переменных прямой и двойственной задачи.

Практическую ценность представляет разработанный и реализованный туннельный алгоритм решения оптимизационной постановки задачи поиска равновесий Вальраса всех трех типов для рассмотренной модификации межрегиональной модели. Данный алгоритм был положительно протестирован на малоразмерном условном примере экономики из трех регионов и пяти отраслей. Основным его недостатком по сравнению с итерационными эвристическими алгоритмами является быстродействие.

В процессе исследования возникли задачи, которые дают перспективу дальнейших исследования в данной области. Таковыми являются:

1) Теоретическое обоснование итерационных методов поиска состояний эквивалентного обмена и равновесия в широком смысле (тех, которые характеризуются выполнением для каждого региона ровно одного условия-равенства). Эти алгоритмы на данный момент являются эвристическими, но несмотря на это показывают сходимость и эффективность при экспериментальных расчетах. К тому же вариант алгоритма для поиска эквивалентного обмена давно используется в прикладном равновесном анализе по более ранним модификациям ОМММ и очень хорошо себя зарекомендовал.

2) Модификация алгоритмов из п. 1 на случай поиска состояний, характеризующихся выполнением для каждого региона не одного

условия, а некоторой системы уравнений (таким состояние является к примеру, сильное равновесие).

3) Проведение прикладного равновесного анализа экономики России в разрезе 10 регионов и 40 отраслей на полноразмерном варианте межрегиональной модели с использованием новых конструкций и методов.

Литература

1. Васильев В.А., Суслов В.И. Равновесие Эджворта в одной модели межрегиональных экономических отношений // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2010. - Т. XIII, № 1. - С. 18-33.
2. Суслов В.И. Равновесие в пространственных экономических системах // Сложные системы в экстремальных условиях : тез. док. XV Всерос. симпозиума с междунар. участием, 16-21 авг. 2010 г. / редкол.: Р.Г. Хлебопрос, И.И. Моргулис, О.В. Круглик. - Красноярск: Красноярский науч. цнтр, СО РАН, Сиб. фед. ун-т, 2010. - С. 68-69.
3. Рубинштейн А.Г. Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах.– Н.: «Наука», 1983.
4. Ariel Rubinstein (1982), Perfect equilibrium in a bargaining model, Econometrica 50, 97-109.
5. Суслов В.И. Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: модели, методы, результаты / отв. ред. А.Г. Гранберг; ИЭОПП СО АН СССР. - Новосибирск: Наука. Сиб. отд-е, 1991. - 252 с.
6. Гамидов Т.Г., Доможиров Д.А., Ибрагимов Н.М. Равновесие Вальраса в модели взаимодействия регионов с условными центрами. Эквивалентность теоретического подхода и прикладного метода// Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Социально-экономические науки. - 2011. - Т. 11, вып. 3. - С. 12-26.
7. Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума.//Москва: Наука, 1991.
8. Gembicki, F.W., "Vector Optimization for Control with Performance and Parameter Sensitivity Indices," Ph.D. Thesis, Case Western Reserve Univ., Cleveland, Ohio, 1974.